PREIMO 2010 - NM

Titolo nota 17/05/2010

① (p,q) primi t.c. $p^3 - q^5 = (p+q)^2$

$p=2$ oppure $\boxed{q=2}$ → niente

$p=3$ " $\boxed{q=3}$ $p^3 - 243 = (p+3)^2 \rightsquigarrow p=7$

Come dim. che è l'unica soluzione ?

Modulo 3 : di sicuro p e q sono $\equiv 1, 2 \pmod 3$,
quindi $p^3 \equiv p$ e $q^5 \equiv q \pmod 3$

Allora

$$LHS \equiv p - q \pmod 3$$

Cosa si può dire del RHS ?

Dipende

$p \equiv 1$	$q \equiv 1$	$LHS \equiv 0$	$RHS \equiv 1$
$p \equiv 2$	$q \equiv 2$	$LHS \equiv 0$	$RHS \equiv 1$
$p \equiv 1$	$q \equiv 2$	$LHS \equiv 2$	$RHS \equiv 0$
$p \equiv 2$	$q \equiv 1$	$LHS \equiv 1$	$RHS \equiv 0$

No soluzioni

—o—o—

$p \neq q$ per molti motivi

$p^3 \equiv p^2 \ (q) \Rightarrow \boxed{p \equiv 1 \ (q)} \Rightarrow kq = p-1$

$-q^5 \equiv q^2 \ (p) \Rightarrow \underline{q^3 \equiv -1} \ (p)$ $\quad \underline{p = \boxed{kq+1}}$

$\cancel{q \equiv -1} \ (p)$ $\quad q^2 - q + 1 \equiv 0 \ (p)$

$\boxed{p} \mid q^2 - q + 1 \Rightarrow \underline{kq+1} \mid \underline{q^2 - q + 1}$

$\cancel{kq^2} - \cancel{kq} + k - q(\cancel{kq}+1) -$

$(\cancel{kq}+1 \ )$

$k\,q+1 \mid \underline{k-q+1}$ $\qquad$ $k-p+1=0 \Rightarrow k=q-1$

$p = \underline{q^2-q+1}$

$(q^2-q+1)^3 - q^5 = (q^2+1)^2$

$q\,\underline{(q-3)}\,\underline{\left(\dfrac{q^5+1}{q+1}\right)} = 0 \quad \boxed{\begin{array}{l} q=3 \\ p=7 \end{array}}$

— o — o —

$q^3+1 \equiv 0 \ (p) \quad \rightarrow \quad q^6-1 \equiv 0 \ (p)$

$q+1 \not\equiv 0 \ (p)$

$\mathrm{ord}_p(q) \mid 6 \quad \begin{cases} 1 \rightarrow \text{NO} \\ 2 \rightarrow \text{NO} \\ 3 \rightarrow \text{NO} \\ 6 \end{cases}$

$6 \mid p-1 \qquad p \equiv 1 \ (3)$

$p^3 - q^5 = (p+q)^2$

$1 - q \equiv (1+q)^2 \quad (3)$

$\cancel{1} - \cancel{q} \equiv \cancel{1} + \cancel{2q} + q^2 \quad (3) \qquad q^2 \equiv 0 \ (3)$

$q = 3$

— o — o —

Problema 2 Trovare $x_1, \dots, x_n$ interi pos. distinti t.c.

$$x_1 + \dots + x_n = A^{2009} \qquad x_1 \cdot \dots \cdot x_n = B^{2010}$$

$\boxed{n=1}$ ovvio

$\boxed{n=2}$ $a+b = A^{2009}$ $a \cdot b = B^{2010}$

Idea: parto con a e b a caso e poi spero che ka, kb vadano bene per un qualche k.

$ka + kb = k(a+b) = A^{2009}$ conviene $k = (a+b)^{2008}$

$ka \cdot kb = k^2 ab = B^{2010}$ servirebbe k^2 = potenza 2010-esima

Riprovo usando $k = (a+b)^i$ i incognito. Cosa serve su i?

Somma: $k(a+b) = A^{2009}$ $(a+b)^{i+1} = A^{2009}$

Prodotto: $k^2 ab = B^{2010}$ $(a+b)^{2i} \underset{\uparrow}{a}\underset{\uparrow}{b} = B^{2010}$

potenze 2010-esime

$$\boxed{\begin{array}{l} i+1 \equiv 0 \ (2009) \\ 2i \equiv 0 \ (2010) \end{array}}$$

Devo risolvere $i \equiv -1$ (2009) Si risolve per il teorema
$i \equiv 0$ (1005) cinese.

Soluzione: prendo $a = 1^{2010}$ $b = 35^{2010}$ $k = (a+b)^{\dots}$

La costruzione funziona anche con n variabili

$a_i = i^{2010}$ $x_i = ka_i$ dove $k = (x_1 + \dots + x_n)^e$

$e+1 \equiv 0$ $\boxed{(2009)}$ somma

$e n \equiv 0$ $\boxed{(2010)}$ prodotto $\rightarrow$ teo. cinese

coprimi.

—o—o—

Problema 3 $a > b > 0$ interi. $(a-b, ab+1) = 1$ e $(a+b, ab-1) = 1$

Tesi: $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ no quadrato perfetto.

Osservazione: $(a-b)^2 + (ab+1)^2 = (a+b)^2 + (ab-1)^2$

$$= a^2+b^2+\cancel{2ab}+a^2b^2-\cancel{2ab}+1$$

$$= (a^2+1)(b^2+1)$$

Supponiamo sia un $\square$ perfetto. Uno vorrebbe dire che a^2+1 e b^2+1 sono entrambi $\square$ perfetti.
Basta dim. che sono coprimi.
Supponiamo $p \mid a^2+1$, $p \mid b^2+1$ $\Rightarrow p \mid a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

Se $p \mid (a+b)$ poichè $p \mid (a+b)^2 + (ab-1)^2$ si ha che $p \mid (ab-1)$, da cui $p \mid (a+b, ab-1)$

L'altro caso è analogo.

—o—o—

Problema 4

$a_0 \in \mathbb{Q}$

$a_{n+1} = 2a_n^2 - 1 \quad \forall n \geq 0$

$a_i = a_j$ per almeno 2 indici $i \neq j$

$\downarrow$ periodica da un certo punto in poi

Trovare tutte le successioni con questa proprietà.

$a_0 = \frac{r}{s} \qquad (r,s) = 1$ Come si comporta il denominatore?

$a_1 = 2\frac{r^2}{s^2} - 1 = \frac{2r^2 - s^2}{s^2}$

Se il denom. non si semplifica un po', non ci può essere ripet.

p primo con $p \mid s$. Se p si semplifica, allora $p \mid$ num.

$\Rightarrow p \mid 2r \Rightarrow p = 2$ oppure $\boxed{p \mid r}$ no perché $(r,s) = 1$

L'unico fattore in s che si può semplificare è $p = 2$ e lo può fare con esponente 1.

Quindi $s = 1$ oppure $s = 2$, quindi $a_0 = k \in \mathbb{Z}$ oppure $a_0 = \frac{k}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Si vede facilmente che $a_0 = 0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ sono ok.

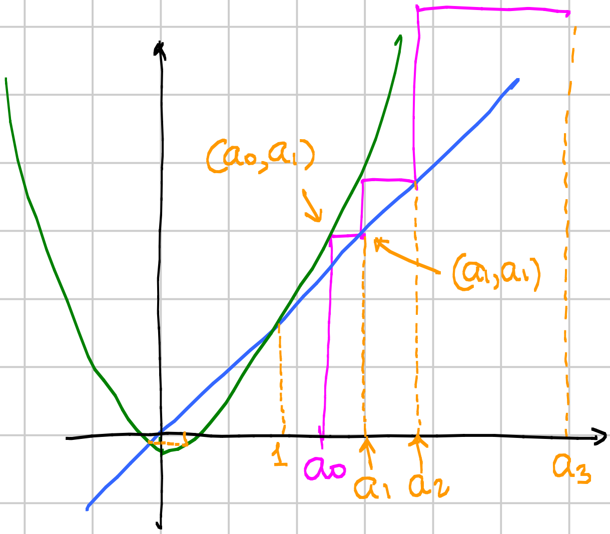
Le altre possibilità sono $\geq \frac{3}{2}$ o $\leq -\frac{3}{2}$

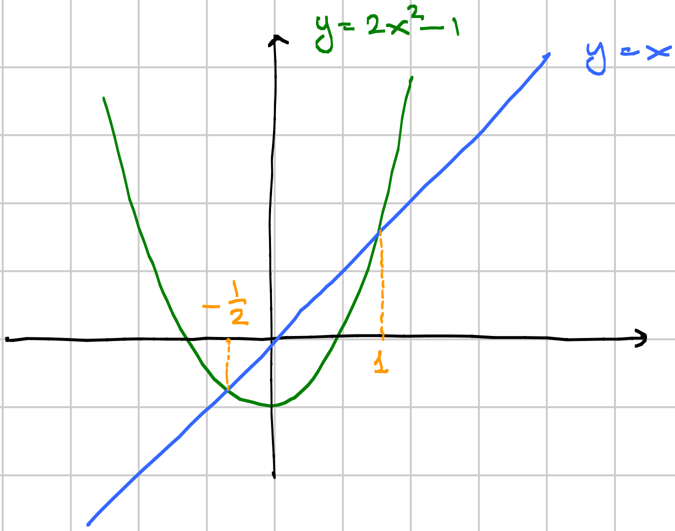
Lemma Se $a_0 \in \mathbb{R}$ con $a_0 \geq \frac{3}{2}$, allora a_n è strett. cresc.

(Stessa cosa se $a_0 \in \mathbb{R}$ con $a_0 \leq -\frac{3}{2}$, allora $a_1 \geq \frac{3}{2}$ e come sopra)

Il lemma si dimostra per induzione o disequazioni di 2° grado

Interpretazione grafica:



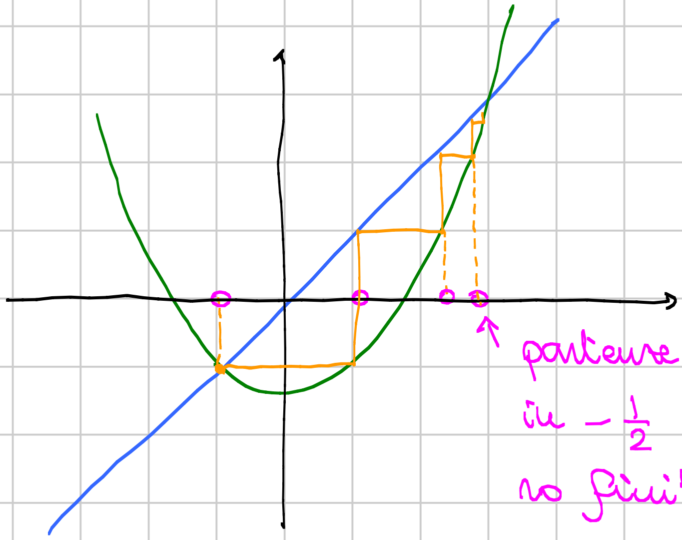


verticale verso la funzione
ovvero verso la bisettrice

Idea: se parto con $a_0 > 1$, la $a_n \to +\infty$

Domanda extra esercizio: se non ci fosse stata la condiz. $a_0 \in \mathbb{Q}$ c'erano altre soluzioni? Sì, infinite che dopo un po' ricadono in $-\frac{1}{2}$

Domanda poco ovvia:
cosa succede se parto
con $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 \in (-1, 1)$?



partenze che portano
in $-\frac{1}{2}$ in un numero
finito di mosse

— o — o —

Formula "esplicita" per questa successione

$a_n = \cos x \qquad a_{n+1} = 2\cos^2 x - 1 = \cos(2x)$

Quindi se $a_0 = \cos\alpha$, allora $a_n = \cos(2^n \alpha)$

Tutti gli a_0 si scrivono come $\cos\alpha$ pur di usare un $\alpha \in \mathbb{C}$

vale anche per $\theta \in \mathbb{C}$ e vale la form. di duplic.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, $\boxed{\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}$